වර්ගජ සමීකරණ [Quadratic Equations]

සිද්ධාන්ත :

01. සම්මත ආකාරය :- [Standard Form]

$$ax^2 + bx + c = 0$$

මෙහි $a \neq 0$, a , b, c තාත්වික නියත වේ.

02. වර්ග සමීකරණයක මූල :- [Roots of a quadratic Equation]

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

සාමාන්‍යයෙන් වර්ග සමීකරණයක මූල සෙවීම සඳහා,

(1) සාධක වෙන් කිරීම. [By factorising]

(2) වර්ග පූර්ණය කිරීම. [By completing squares]

(3) සූත්‍රය භාවිතා කිරීම [Using Formula]

යන ක්‍රම නිතර භාවිතා වේ.

03. වර්ගජ සමීකරණයක විවේචකය :- [discriminent of a quadratic Equation]

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

04. වර්ග සමීකරණයක මූලවල ස්වභාවය :- [Nature of the roots of a quadratic Equations]

(1) $\Delta > 0 \Rightarrow$ තාත්වික හා ප්‍රභින්න මූල 2 ක්
[Two distinct real roots]

(2) $\Delta = 0 \Rightarrow$ තාත්වික හා සමාන (සමපාත) මූල 2 ක්
[Two real and equal roots]

(3) $\Delta < 0 \Rightarrow$ අතාත්වික මූල 2 ක්
[Two Imaginary roots]

(4) $\Delta \geq 0 \Rightarrow$ තාත්වික මූල
[Real roots]

Scanned with CamScanner

05. වර්ග සමීකරණයක මූල සහ සංගුණක අතර සම්බන්ධතා :-
[Relationship between the roots and the coefficients of a quadratic Equations]

$ax^2 + bx + c = 0$ හි මූල α, β නම්

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$
sum of the roots

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$
product of the roots

06. මූල දන්නා විට වර්ග සමීකරණ ගොඩනැගීම :-
[Constructions of a quadratic equation with given roots]

මූල α, β නම්, සමීකරණය පහත ආකාර වේ.

$$(x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$$

x^2 − (මූල 2 එකතුව) x + මූල 2 ගුණිතය = 0

x^2 − (sum of the roots) x + (product of the roots) = 0

මූලික සංකල්ප ආශ්‍රිත ගැටළු

(01) පහත සමීකරණවල මූල තාත්වික ප්‍රභින්න වේද, තාත්වික සමාන වේද, අතාත්වික වේද යන්න දක්වන්න.

(1) $2x^2 + 9x + 1 = 6$ (2) $5x^2 - 3x = x^2 + 7$
(3) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ (4) $x^2 + 2x + 30 = 2$
(5) $(2x+1)^2 = 3x - 1$

(02) පහත ඒවා සාධක වෙන් කරන්න.

(1) $x^2 - x - 6$ (2) $2x^2 - x - 1$ (3) $16x^2 - 9$
(4) $x^2 + 11x + 30$ (5) $3x^2 - 7x + 2$

(03) පහත ඒවා පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස ලියා දක්වන්න.

(1) $k^2 + 2k + 1$ (2) $k^2 + 6k + 9$ (3) $k^2 - 4k + 4$
(4) $\lambda^2 - 10\lambda + 25$ (5) $25k^2 + 10k + 1$
(6) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
(7) $9a^2 + 4b^2 + c^2 + 12ab + 4bc + 6ac$
(8) $4a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 2acb^2 + 2a^2bc - 2c^2ab$

Scanned with CamScanner

Question Type 01

(01) c තාත්ත්වික නම්, පහත දැක්වෙන එක් එක් සමීකරණයේ මූල තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.

(i) $2x^2 - 2(2-c)x + 1 - c = 0$ (ii) $cx^2 + (c-1)x + 1 - 2c = 0$

(02) 1. $\lambda x^2 - 2x - \lambda = 1$ හි මූල තාත්වික හා ප්‍රභින්න බව පෙන්වන්න. (මෙහි $\lambda \in R$)

2. $kx^2 + 2x = k - 2$ සමීකරණයේ මූල තාත්වික බව පෙන්වන්න. (k යනු නියතයකි)

3. a, b, c යනු තාත්වික සංඛ්‍යා නම් $(x-a)(x-b) = c^2$ සමීකරණයේ මූල තාත්වික බව පෙන්වන්න.

4. $f(x) = x^2 + 2(x+k) + kx$ නම් $f(x) = 0$ හි මූල තාත්වික බව පෙන්වන්න.

5. $k \in R$ හා $f(x) = x^2 - 2k(x-1) - 1$ නම් $f(x) = 0$ හි මූල තාත්වික බව පෙන්වන්න.

6. $x^2 + 2(a-3)x + 2a - 12 = 0$ හි මූල තාත්වික ප්‍රභින්න බව පෙන්වන්න.

7. $(a-b-c)x^2 + ax + b + c = 0$ හි මූල තාත්වික බව පෙන්වන්න.

8. $(b-c)x^2 + 2(c-a)x + (a-b) = 0$ හි මූල තාත්වික බව පෙන්වන්න.

9. $(a+b)^2 x^2 - 2(a^2 - b^2)x + (a-b^2) = 0$ හි මූල සමාන බව පෙන්වන්න.

10. $3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab + bc + ca) = 0$ හි මූල තාත්වික බව පෙන්වන්න.

11. $(a^2 + b^2)x^2 + 2(ac + bd)x + c^2 + d^2 = 0$ හි මූල තාත්වික නම් සමාන විය යුතු බව පෙන්වන්න.

12. a, b තාත්වික නම් $x^2 + 2(b+c-a)x + 2bc = a^2$ හි මූල තාත්වික බව පෙන්වන්න.

13. $(b-x)^2 - 4(a-x)(c-x) = 0$ හි මූල තාත්වික බව සාධනය කරන්න.

(03) a, b හා c යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වන විට පහත දැක්වෙන එක් එක් සමීකරණයේ මූල තාත්වික බව පෙන්වන්න.

(i) $(a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$ (ii) $(a-b-c)x^2 + ax + b + c = 0$

(iii) $x^2 - (b+c)x + bc - a^2 = 0$ (iv) $x^2 - 2(b+c-a)x + 2bc = a^2$

Scanned with CamScanner

(04) a, b, c තාත්වික නම් පහත දැක්වෙන එක් එක් සමීකරණයේ මූල අතාත්වික බව පෙන්වන්න.

(i) $2(a^2 + b^2)x^2 + 2(a + b)x + 1 = 0$

(ii) $c^2x^2 - 6cax + 9a^2 + 4b^2 = 0$

(iii) $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 - 2bc + 2c^2 = 0$

(05) $a, b, c \in \mathbb{R}$ වේ. පහත සමීකරණවල මූල තාත්වික බව පෙන්වන්න.

(i) $(x - a)(x - b) = b^2$

(ii) $(x - a)(x - b) = abx^2$

(iii) $(a + b)x^2 - 2ax + (a - b) = 0$

(iv) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 - c^2 = 0$

(v) $(a - b + c)x^2 + 4(a - b)x + (a - b - c) = 0$

(vi) $(a + b - c)x^2 + 3(a + b)x + (a + b + c) = 0$

Question Type 02

(06) පහත දැක්වෙන එක් එක් සමීකරණයේ මූල තාත්වික වන k හි අගය ප්‍රාන්තර නිර්ණය කරන්න.

(i) $(x - 3)(x - 4) + k^2 = 0$

(ii) $k(x^2 + x + 1) + x^2 - 3x + 1 = 0$

(07) පහත දැක්වෙන එක් එක් සමීකරණයේ මූල සම්පාත වන m හි අගය ද මූල අතාත්වික වන m හි අගය ප්‍රාන්තර ද නිර්ණය කරන්න.

(i) $x^2 - 15 - m(2x - 8) = 0$

(ii) $x^2 - 2x(1 + 3m) + 7(3 + 2m) = 0$

(08) $x + y = c$ හා $y = x^2 + 2x + 3c$ සමගාමී සමීකරණ වල මූල ප්‍රභින්න වන්නේ $8c + 9 > 0$ නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

(09) a සෘණ වනවිට $ax^2 + bx + c^2 = 0$ හි මූල සම්පාත විය නොහැකි බව පෙන්වා, a (+) විට මූල සම්පාත වීම සඳහා අවශ්‍යතාවය සොයන්න.

(10) $x^2 + kx + 9 = 0$ සමීකරණයේ මූල සමාන නම් k හි අගය සොයන්න.

(11) $(7\lambda + 1)x^2 + (5\lambda - 1)x + \lambda = 1$ සමීකරණයට සම්පාත මූල පවතී නම් λ සොයන්න.

(12) $ax^2 + bx + 1 = 0$ ට හරියටම එක් තාත්වික මූලයක් පැවතීමට a හා b අතර සම්බන්ධයක් සොයන්න.

(13) $x^2 - 2x(1 + 3a) + 7(3 + 3a) = 0$ ට සමාන මූල තිබේ නම් a සොයන්න.

(14) p, q, r තාත්වික නම්, $x^2 + 2[q + r - p]x + 2qr = p^2$ මූල තාත්වික බව පෙන්වන්න.

(15) (i) $x^2 - 15 - k(2x - 8) = 0$ හි මූල සමපාත වන k හි අගය සොයන්න.

(ii) $x^2 - 2x(1 + 3k) + 7(3 + 2k) = 0$ ට එක් තාත්වික මූලයක් පවතින k හි අගය සොයන්න.

(16) $3x^2 + kx + 12 = 0$ සමීකරණයේ මූල සමාන නම්, k හි අගය සොයන්න.

(17) $(7a + 1)x^2 + (5a - 1)x + a = 1$ සමීකරණයට සමාන මූල පවතී නම්, a හි අගය සොයන්න.

(18) $x^2 + 2x + 3 = k(2x + 1)$ සමීකරණයේ මූල අතාත්වික වීම සඳහා k හි අගය පිහිටිය යුතු පරාසය සොයන්න.

(19) $p(q - r)x^2 + q(r - p)x + r(p - q) = 0$ හි මූල සමාන නම් $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{2}{q}$ බව පෙන්වන්න.

(20) $(k - 1)x^2 + k = 2x + 1$ වර්ග සමීකරණයේ මූල තාත්වික වන k හි අගය පරාසය සොයන්න.

(21) $\lambda + R$ නම් $10x^2 + 4x + 1 = 2x\lambda(2 - x)$ නම්,

(i) තාත්වික මූල පැවතීමට λ හි අගය පරාසය සොයන්න.

(ii) සමාන මූල පැවතීමට λ හි අගයත් සොයන්න.

(22) (i) $0 < k < 4$ නම්, $kx(1 - x) = 1$ සමීකරණයේ මූල ද

(ii) $k < -\frac{3}{2}$ හෝ $k > 3$ නම්, $3kx^2 + 2(2k - 3)x + 2k - 5 = 0$ සමීකරණයේ මූල ද අතාත්වික බව පෙන්වන්න.

(23) a, b හා c තාත්ත්වික ද ප්‍රභින්න ද නම් $(a - b)^2x^2 + 2(a + b - 2c)x + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල තාත්ත්වික හෝ අතාත්වික හෝ වන්නේ c හි අගය a හා b අතර නොපිහිටීම හෝ පිහිටීම හෝ අනුව බව පෙන්වන්න.

(24) පහත සමීකරණවල මූල සමාන නම් k සොයන්න.

(i) $25x^2 - kx + 4 = 0$

(ii) $9x^2 - 12x + k = 0$

(iii) $(k + 1)x^2 + 2kx + 6x + k + 8 = 0$

(iv) $x^2 - (3k - 4)(x - 1) + k^2 - 1 = 0$

Scanned with CamScanner

(25) පහත සමීකරණවල මූල තාත්වික වන λ වල අගය සොයන්න.

(i) $25x^2 - \lambda x + 4 = 0$

(ii) $(4 - \lambda)x^2 + (2\lambda + 4)x + (8\lambda + 1) = 0$

(26) පහත සමීකරණවල මූල අතාත්වික නම් k වල අගය සොයන්න.

(i) $(k + 1)x^2 + 2(k + 3)x + (k + 8) = 0$

(ii) $4x^2 + 2kx + 1 = kx^2 - 4x - 8k$

Question Type 03

(27) $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල අතාත්වික නම් $(a + c - b)x^2 - 2(a - c)x + (a + b + c) = 0$ හි මූල තාත්ත්වික බව සාධනය කරන්න.

(28) $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල අතාත්වික නම් $ax^2 - 2(a + b)x + (a + 2b + 4c) = 0$ හි මූල ද අතාත්ත්වික බව සාධනය කරන්න.

(29) $p^2x^2 + 6pqx + pr + 8q^2 = 0$ සමීකරණයේ මූල තාත්ත්වික හා සමපාත වෙයි. $pr(x + 1)^2 = 4q^2x$ නම් සමීකරණයේ මූල ද තාත්ත්වික හා සමපාත වන බව සාධනය කරන්න.

(30) $a, b, c \in R$ සහ $a \neq 0$ වන විට $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල අතාත්ත්වික නම් $c(a + b + c) > 0$ වන බව පෙන්වන්න.

(31) a, b හා c තාත්ත්වික ද ප්‍රභින්න ද නම් $(a - b)^2x^2 + 2(a + b - 2c)x + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල තාත්ත්වික හෝ අතාත්ත්වික හෝ වන්නේ, c හි අගය a හා b අතර නොපිහිටීම හෝ පිහිටීම හෝ අනුව බව පෙන්වන්න.

Question Type 04

(32) x තාත්වික නම්, $\dfrac{x^2 + 2x + 7}{2x + 3}$ ප්‍රකාශනයට −3 ත්, 2 ත් අතර අගය හැර අන් සියලුම සංඛ්‍යාත්මක අගය ගතහැකි බව පෙන්වන්න.

(33) x හි තාත්වික අගයන් සඳහා පහත සඳහන් ශ්‍රිත කවර අගය සීමා අතර පිහිටිය යුතුදැයි සොයන්න.

(i) $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ (ii) $\dfrac{x^2 + 10x + 65}{2x + 4}$ (iii) $\dfrac{x^2 + 3x + 1}{2x^2 - 3x + 2}$

Scanned with CamScanner

(34) (i) x හි තාත්වික අගයන් සඳහා $\dfrac{6x+5}{3x^2+4x+2}$ ශ්‍රිතයට ගතහැකි අගය පරාසය සොයන්න.

(ii) x තාත්වික හා වෙනස් අගයන් ගන්නා විට $\dfrac{5x^2+4x+2}{2x^2-4x+5}$ ශ්‍රිතයට ගතහැකි අගය පරාසය සොයන්න.

Question Type 05

(35) x හි තාත්වික අගයන් සඳහා $\dfrac{x-p}{x^2-2x+p}$ ශ්‍රිතයට තාත්වික අගයන් පැවතීමට p වල අගය පරාසය සොයන්න.

(36) x තාත්විකව සිටියදී $\dfrac{x^2-1}{(x-2)(x+k)}$ ශ්‍රිතය සියළු තාත්වික අගයන් ලැබිය හැකි වන k හි අගය පරාසය සොයන්න.

Question Type 06

x හා y තාත්වික වේ.

(37) $9x^2+2xy+y^2=92x-20y+244=0$ නම්, $3\le x\le 6$ නම් $1\le x\le 2$ යැයි දක්වන්න.

(38) $x^2+xy-2y^2-3x+3y+9=0$ නම් ද x හා y තාත්වික නම්ද, x ට ඕනෑම තාත්වික අගයක් ගතහැකි බවද, y ට 3 හා −1 අතර අගයක් ගත නොහැකි බව පෙන්වන්න.

Question Type 07

(39) a , b පරිමේය සංඛ්‍යා නම් $2ax^2+(2a+b)x+b=0$ හි මූල පරිමේය බව පෙන්වන්න.

(40) $(a+c-b)x^2+2cx+(b+c-a)=0$ හි මූල පරිමේය බව පෙන්වන්න.

(41) a , b , c යනු පරිමේය සංඛ්‍යා නම්,

(i) $(a-b)x^2+(b+c-a)x-c=0$ හා

(ii) $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ යන එක් එක් සමීකරණයේ මූල පරිමේය බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

(42) p, q, k ($\neq 0$) යනු $p = k + \frac{q}{k}$ වන පරිදි වූ පරිමේය සංඛ්‍යා නම්, $x^2 + px + q = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල පරිමේය වන බව පෙන්වන්න.
ඉහත සමීකරණයේ මූල සම්පාත වන විට p හා q හි අගයන් k ඇසුරෙන් නිර්ණය කරන්න.

(43) a හා m තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වන විට $x^2 - 4mx + 4x + 3m^2 - 2m + 4a = 0$ මූල පරිමේය වන සේ m ඇසුරෙන් a සොයන්න.

(44) පහත සමීකරණවල සංගුණක පරිමේය නම්, මූල පරිමේය බව පෙන්වන්න.

(i) $2ax + (2a + b)x + b = 0$

(ii) $(a - b)x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0$

(iii) $(b + c - a)x^2 - 2cx + (a + c - b) = 0$

(iv) $(a + c - b)x^2 = 2cx + (b + c - a) = 0$

(v) $(2a + 3b)x^2 - (4a + 5b)x + 2(a + b) = 0$

(45) a, b හා c පරිමේය සංඛ්‍යා නම් $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 + 2bc - c^2 = 0$ සමීකරණයේ මූල පරිමේය බව පෙන්වන්න.

(46) $a + b + c = 0$ හා a, b, c පරිමේය සංඛ්‍යා නම් $(b + c - a)x^2 + (c + a - b)x + (a + b - c) = 0$ සමීකරණයේ මූල පරිමේය බව සාධනය කරන්න.

(47) a, b, c පරිමේය වන විට $a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0$ සමීකරණයේ මූල පරිමේය බව සාධනය කරන්න.

Question Type 08

(48) $ax^2 + bx + c = 0$ හි මූල α, β වේ. [$a \neq 0$] පහත ඒවා මූල වන සමීකරණය සොයන්න.

(i) α^2, β^2

(ii) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$

(iii) α^3, β^3

(iv) $\frac{\alpha^2}{\beta^2}, \frac{\beta^2}{\alpha^2}$

(v) α^4, β^4

(vi) $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$

(vii) $(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2$

(viii) $\frac{1}{(\alpha + \beta)}, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

(ix) $\frac{\alpha}{2\beta + 3}, \frac{\beta}{2\alpha + 3}$

(x) $\alpha^2 + \beta^2, \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$

Scanned with CamScanner

(49) $ax^2 + bx + c = 0$ හි මූල α හා β වේ. පහත ඒවා මූල වන සමීකරණ සොයන්න.

(i) $4\alpha, 4\beta$ (ii) α^2, β^2 (iii) α^3, β^3 (iv) α^4, β^4

(50) $x^2 - 4x + 6 = 0$ හි මූල α හා β වේ. පහත ඒවා මූල වන සමීකරණ සොයන්න.

(i) $5\alpha, 5\beta$ (ii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ (iii) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$

(iv) $(\alpha^2 + \alpha), (\beta^2 + \beta)$ (v) $\alpha(\alpha + \beta), \beta(\alpha + \beta)$ (vi) $\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}$

(vii) $\frac{1}{\alpha^3}, \frac{1}{\beta^3}$

(51) $\frac{a}{x - a} + \frac{b}{x - b} = 1$ සමීකරණයේ මූල ප්‍රතිවිරුද්ධ ලකුණු ඇතිව සංඛ්‍යාත්මක ව සමාන වීමට අවශ්‍යතාව සොයන්න.

(52) $\frac{x^2 - bx}{ax - c} = \frac{m - 1}{m + 1}$ සමීකරණයේ මූල දෙක විශාලත්වයෙන් සමාන හා ලකුණින් ප්‍රතිවිරුද්ධ වේනම් $m = \frac{a - b}{a + b}$ බව පෙන්වන්න.

(53) $2x^2 + 8x + 7 = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β නම්, $\alpha^2 + \beta^2$ හි අගය සොයන්න. $\frac{\alpha}{\beta}$ හා $\frac{\beta}{\alpha}$ මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය නිර්ණය කරන්න.

(54) α හා β යනු $x^2 + ax + b = 0$ සමීකරණයේ මූල නම්, $\alpha^3 + \beta^3 = 3ab - a^3$ බව සාධනය කරන්න. $(\alpha - 1)^2$ හා $(\beta - 1)^2$ මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

(55) $x^2 + px + q = 0$ සමීකරණයේ මූල වල වර්ග, මූල වශයෙන් ඇති සමීකරණය සොයන්න.

(56) λ හා μ යනු $x^2 - ax + b = 0$ හි මූල වේ නම්, $\lambda(\lambda + \mu)$ හා $\mu(\lambda + \mu)$ මූලවන වර්ග සමීකරණය සොයන්න.

(57) c හි සියළුම අගය සඳහා $x^2 + 2cx - 2c = -3 - 2x$ වර්ග සමීකරණයේ මූල තාත්වික බව ද, මූලවල වෙනසය ගුණිතයට එකකින් වැඩි බවද සාධනය කරන්න.

(58) $ax^2 + (a - 1)x + 1 = 2a$ සමීකරණයේ මූලවල වෙනසය, ගුණිතය මෙන් තෙගුණයක් නම් a හි අගය සොයන්න.

Scanned with CamScanner

(59) α හා β යනු $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල නම්,

(i) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ (ii) $\alpha^4\beta^7 + \alpha^7\beta^4$ (iii) $\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2$

(iv) $(a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2}$ (v) $\alpha^2(\alpha^2\alpha^{-1} - \beta) + \beta^2(\beta^2\alpha^{-1} - \alpha)$

යන ඒවායේ අගයයන් a, b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න.

(60) $x + \frac{1}{x} = 1$ හි මූල α හා β නම්

(i) $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)$ (ii) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ (iii) $\frac{\alpha + \beta}{\beta + 2\alpha} + \frac{\beta + 2\alpha}{\alpha + 2\beta}$

යන ඒවායේ අගය සොයන්න.

(61) පහත දැක්වෙන එක් එක් සමීකරණයේ මූලවල පරස්පර මූල වශයෙන් ඇති සමීකරණ නිර්ණය කරන්න.

(i) $5x^2 - 20x + 17 = 0$ (ii) $qx - r = px^2$

(62) $(x - a)(x - b) + h^2 = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β නම්, $(\alpha + 2\beta)$ හා $(\beta + 2\alpha)$ මූල වශයෙන් ඇති සමීකරණය $(x - a - 2b)(x - b - 2a) + h^2 = 0$ බව සාධනය කරන්න.

(63) α හා β යනු $x^2 + px + q = 0$ සමීකරණයේ මූල නම්,

(i) $(\alpha - \beta)^2$ හා $(\alpha + \beta)^2$ මූල වශයෙන් ඇති

(ii) $(\alpha^2 + \beta)^2$ හා $(\alpha^2 + \beta)^2$ මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණ ගොඩ නගන්න.

p හා q තාත්ත්වික නම්, ඉහත (i) හා (ii) හි සඳහන් මූල තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.

Question Type 09

(64) $x^2 + ax + b = 0$ හා $x^2 + bx + a = 0$ සමීකරණවල මූල අතර අන්තරය සමාන නම් $a + b + 4 = 0$ බව පෙන්වන්න.

(65) $x^2 + 5x + q = 0$ සමීකරණයේ මූල අතර වෙනස 1 ට සමාන වේ. q හි අගය සොයන්න.

(66) $x^2 + 2px + q = 0$ හි මූල අතර වෙනස 2 ට සමාන නම් $p^2 = 1 + q$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

(67) $ax^2 + bx + c = 0$ හි මූල අතර වෙනස d වේ. $a^2 = b^2d^2 - 4ac$ බව පෙන්වන්න.

(68) $(a - b)x^2 - 2(a^2 + b^2)x + (a^3 - b^3) = 0$ හි මූල අතර අන්තරය $\dfrac{2(a + b)\sqrt{ab}}{(a - b)}$ බව පෙන්වන්න.

Question Type 10

(69) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ හි මූල α, β නම්, $3[\alpha^5 + \beta^5] - 5[\alpha^4 + \beta^4] + 7[\alpha^3 + \beta^3] = 0$ බව පෙන්වන්න.

(70) $x^2 - px - q = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β නම්, n යනු ධන නිඛිලයක් වන විට, $(n > 1)$
$\alpha^n + \beta^n = p(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) + q(\alpha^{n-2} + \beta^{n-2})$ බව පෙන්වන්න.

(71) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ හි මූල α හා β නම්, $2(\alpha^{2017} + \beta^{2017}) - 5(\alpha^{2016} + \beta^{2016}) + 3(\alpha^{2015} + \beta^{2015})$ බව පෙන්වන්න.

Question Type 11

(72) $x^2 + ax + bc = 0$ හා $x^2 + bx + ca = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූල පවතී නම්, ඒවායේ ඉතිරි ඒවා මූලවන සමීකරණ සොයන්න.

(73) $ax^2 + a^2x + 1 = 0$ ද $bx^2 + b^2x + 1 = 0$ ද යන සමීකරණවලට පොදු මූල පවතී නම්, ඒවායේ ඉතිරි ඒවා මූල $abx^2 + x + a^2b^2 = 0$ වන සමීකරණ සොයන්න.

(74) $ax^2 + 2bx + c = 0$ හා $a'x^2 + 2b'x + c' = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත්නම්,
$4(bc' - b'c)(ab' - a'b) = (ca' - c'a)^2$ බව පෙන්වන්න.
$kx^2 + 2x + 1 = 0$ හා $x^2 + 2x + k = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත්නම්, k හි අගයයන්ද එක් එක් අවස්ථාවේ දී පොදු මූලය ද සොයන්න.

(75) $x^2 + bx + c = 0$ සහ $x^2 + cx + b = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත්නම්, $b = c$ හෝ $b + c + 1 = 0$ බව පෙන්වන්න.

(76) $ax^2 + bx + c = 0$ සහ $bx^2 + cx + a = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත්නම්, $a + b + c = 0$ හෝ $a = b = c$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $a, b, c \in R$ වේ.

Scanned with CamScanner

(77) $x^2 + px + q = 0$ සහ $x^2 + rx + s = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත්නම් එය $\dfrac{ps - qr}{q - s}$ හෝ $\dfrac{q - s}{r - p}$ බව පෙන්වන්න.

Question Type 12

(78) $x^2 - px + q = 0$ වර්ගජයේ මූල α හා β නම් $x^2 + p^2x + p^2q = 0$ හි මූල α, β ඇසුරෙන් සොයන්න.

(79) $ax^2 + bx + q = 0$ හි මූල α හා β නම් $acx^2 - b(a + c)x + (a + c)^2 = 0$ හි මූල α, β ඇසුරෙන් සොයන්න.

Question Type 13

(80) $ax^2 + bx + c = 0$ හි මූල $3 : 4$ වේ නම් $12b^2 = 49ac$ බව පෙන්වන්න.

(81) $x^2 - px + q = 0$ හි එක් මූලයක්, අනෙක මෙන් දෙගුණයක් වේ. $2p^2 = pq$ බව පෙන්වන්න.

(82) $x^2 + px + q = 0$ හා $x^2 + lx + m = 0$ වර්ග සමීකරණවල මූල වල අනුපාත සමාන නම්, $p^2m = l^2q$ බව පෙන්වන්න.

(83) $ax^2 + bx + c = 0$ හි මූල නම් $\alpha : n\alpha$ නම් $(n + 1)^2 ac = nb^2$ පෙන්වන්න.

(84) (i) $ax^2 + bx + c = 0$ හි මූල $\lambda : 1$ අනුපාතයට නම් $ac\lambda^2 + (2ac - b^2)\lambda + ac = 0$ බව සාධනය කරන්න.

(ii) $lx^2 + mx + n = 0$ සමීකරණයේ මූල අතර අනුපාතයත්, $px^2 + qx + r = 0$ සමීකරණයේ මූල අතර අනුපාතයක් සමාන නම් $m^2 rp = q^2nl$ බව පෙන්වන්න.

Question Type 14

(85) $ax^2 + bx + c = 0$ වර්ග සමීකරණයේ මූල දෙකම,

(i) ධන වීමට

(ii) සෘණ වීමට

(iii) එකක් ධන සහ සෘණ වීමට අවශ්‍යතාවය ලියන්න.

Scanned with CamScanner

පරාසය

(86) $9x^2 + 6x + 1 = 4kx$ නම් වර්ග සමීකරණයේ මුල 2 ම ධනවන k හි අගය සොයන්න.

(87) $x^2 - kx + 4 = 0$ හි මුල 2 ම සෘණ වන k හි අගය සොයන්න.

(88) $\lambda(x^2 + x + 1) = 2x + 1$ සමීකරණයේ මුල දෙකම ධන වේ නම් λ හි අගය කුලකය සොයන්න.

(89) $ax^2 + bx + c = 0$ හි මුල $p + q$ අනුපාතයට වේ නම්, $b^2pq = ac(p+q)^2$ බව පෙන්වන්න.

(90) $ax^2 + bx + c = 0$ හි මුල 2 අතර වෙනස 1 ක් නම්, $b^2 - a^2 = 4ac$ බව පෙන්වන්න.

(91) $ax^2 + bx + c = 0$ හි එක මුලයක්, අනෙක් වර්ගය වීම සඳහා අවශ්‍යතාවයක් සොයන්න.

(92) $ax^2 + bx + c = 0$ හි එක මුලයක් අනෙක් මුලයේ පරස්පරය වීම සඳහා අවශ්‍යතාවයක් සොයන්න.

Question Type 15

(93) $x^2 + bx + c = 0$ හි මුල α හා β වේ. මුළු එකතුව හා ගුණිතය සෙවීමකින් තොරව පහත ඒවා මුල වන සමීකරණය සොයන්න.

(i) $(\alpha + 1), (\beta + 1)$

(ii) $(2\alpha - 1), (2\beta - 1)$

(iii) $\dfrac{1}{(3\alpha - 1)}, \dfrac{1}{(3\alpha + 1)}$

(iv) $\dfrac{\alpha}{2\alpha + 1}, \dfrac{\beta}{2\beta + 1}$

(94) $ax^2 + bx + c = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මුල α හා β නම්, α^3 සහ β^3 මුල වශයෙන් ඇති සමීකරණය ගොඩනගන්න. එනයින්, $\dfrac{1}{\alpha^2}$ සහ $\dfrac{1}{\beta^2}$ මුල වශයෙන් ඇති සමීකරණය අපෝහනය කරන්න.

(95) $ax^2 + bx + c = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මුල α හා β නම්, α^3 සහ β^3 මුල වශයෙන් ඇති සමීකරණය ගොඩනගන්න. එනයින්, $\dfrac{\alpha^3}{\beta^3} + 1$ සහ $\dfrac{\beta^3}{\alpha^3} + 1$ මුල වශයෙන් ඇති සමීකරණය අපෝහනය කරන්න.

Scanned with CamScanner

(96) $\dfrac{1}{(x+a)}+\dfrac{1}{(x+b)}=\dfrac{1}{c}$ හි මූල 2 එකතුව ශූන්‍ය වේ නම්, මූල 2 ගුණිතය $=-\dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$ බව පෙන්වන්න.

(97) $ax^2+cx+c=0$ හි මූල අතර අනුපාතය $p:q$ වේ නම්, $\sqrt{\dfrac{p}{q}}+\sqrt{\dfrac{q}{p}}+\sqrt{\dfrac{c}{a}}=0$ බව පෙන්වන්න.

(98) $x^2+px+q=0$ හි මූල අතර අනුපාතයත්, $x^2+p_1x+q_1=0$ හි මූල අතර අනුපාතයත් සමාන නම්, $p^2q_1=p_1^2q$ බව පෙන්වන්න.

(99) $ax^2+bx+c=0$ හි මූලයක්, අනෙක් n වෙනි බලයට සමාන නම්, $(ac^n)^{\frac{1}{n+1}}+(a^nc)^{\frac{1}{n+1}}+b=0$ බව පෙන්වන්න.

(100) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{4}{3}$ වන පරිදි $m^2(x^2-x)+2mx+3=0$ හි මූල α,β වේ. තවද m වල අගයන් m_1, m_2 නම් $\dfrac{m_1^2}{m_2}+\dfrac{m_2^2}{m_1}=-\dfrac{68}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(101) $x^2+px+q=0$ සමීකරණයේ x වල සංගුණකය 17 ලෙස සටහන් වුවද, නිවැරදි අගය 13 විය යුතුය. වැරදි ලෙස ඇතිවිට මූල $2, -2$ හා -15 වේ. නිවැරදි ලෙස ඇති විට මූල සොයන්න.

(102) $l, m \in \mathbb{R}$ වන විට, $(l-m)x^2+lx+l=0$ සමීකරණයේ එක් මූලයක් අනෙක් මෙන් දෙගුණයක් වේ. $m\le\dfrac{9}{8}$ බව පෙන්වන්න.

(103) α, β යනු $ax^2+bx+c=0$ හි මූල වේ. $\alpha+k,\ \beta+k$ යනු $Ax^2+Bx+C=0$ මූල වේ. $\dfrac{b^2-4ac}{a^2}=\dfrac{B^2-4AC}{A^2}$ බව පෙන්වන්න.

(104) $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ වේ. $pr=2(q+s)$ වේ. $x^2+px+q=0$ හා $x^2+rx+s=0$ සමීකරණ වලින් අඩු වශයෙන් එකකටවත් තාත්වික මූල ඇති බව පෙන්වන්න.

(105) $ax^2+bx+c=0$ හා $bx^2+cx+a=0$ ට පොදු මූලයක් පවතී නම්, $a+b+c=0$ හෝ $a=b=c$ බව පෙන්වන්න. [මෙහි $a, b, c \in \mathbb{R}$]

Scanned with CamScanner

(106) $x^2 + px + q = 0$ ට හා $x^2 + qx + p = 0$ ට පොදු මූල 1 ක් පවතී නම් $p + q + 1 = 0$ බව පෙන්වන්න. ඉතිරි මූල 2, මූලවන සමීකරණය $x^2 + x + pq = 0$ බව පෙන්වන්න.

(107) λ හි λ_1 සහ λ_2 අගයන් සඳහා $\frac{\lambda}{2x} = \frac{a}{x+c} + \frac{b}{x-c}$ සමීකරණයේ මූල x සඳහා සමපාත වෙයි නම්, $\lambda_1 - \lambda_2 = 4\sqrt{ab}$ බව පෙන්වන්න.

(108) $k \neq 0$ වන විට, $k(x^2 - x) + 2(x+1) = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β වේ.

(i) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ හි අගය k ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

(ii) k_1 හා k_2 යනු $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = -3$ වන පරිදි වූ k හි අගයන් දෙකකි. k_1 හා k_2 හි අගය නොසොයා $\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} + 1 . 0$ බව පෙන්වන්න.

(109) α හා β යනු $ax^2 + cx + c = 0$ සමීකරණයේ මූලයන් නම්, $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{c}{a}} = 0$ බව සාධනය කරන්න.

(110) $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූලවල එකතුව ඒවායේ පරස්පරවල වර්ගවල එකතුවට සමාන නම් $\frac{c}{a}$, $\frac{a}{b}$ හා $\frac{b}{c}$ සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටන බව පෙන්වන්න.

(111) $(a+x)(b+x) - c(a+x) - d(b+x) = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β නම්, $(\alpha - \beta)^2 = (a - b + c - d)^2 + 4cd$ බව සාධනය කරන්න. a, b, c හා d තාත්ත්වික ද, c හා d දෙකම ධන හෝ සෘණ නම් ද, α හා β තාත්ත්වික බව අපෝහනය කරන්න.

(112) $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β වේ. $\alpha + \beta$, $\alpha^2 + \beta^2$ හා $\alpha^3 + \beta^3$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක පිහිටයි නම්, $b^2c - 4ac^2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

(113) $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ තාත්ත්වික මූල දෙක α හා β වේ. $a < -1$ හා $\beta > 1$ නම්, $1 + \frac{c}{a} + \left|\frac{b}{a}\right| < 0$ බව පෙන්වන්න.

(114) $ax^2 + 2bx + c = 0$ හි මූල α හා β ද, $px^2 + 2qx + r = 0$ හි මූල γ හා δ ද, ඒවායේ විවේචක පිළිවෙලින් Δ_1 හා Δ_2 නම් ද, α, β, γ හා δ සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටයි නම් ද $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \left(\frac{a}{p}\right)^2$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

(115) a, b හා c ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක පිහිටයි. $ax^2 + 2bx + c = 0$ සහ $dx^2 + 2ex + f = 0$ යන සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත්නම් එය $\frac{d}{a}$, $\frac{e}{b}$ හා $\frac{f}{c}$ සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටන බව පෙන්වන්න.

(116) $x^3 - 3x + 1 = 0$ හි මූල $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ නම් $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2 = 6$ බව පෙන්වන්න.

(117) $x^3 - 3px^2 + 3qx + r = 0$ හි මූල සමාන්තර ශ්‍රේණියක අනුයාත පද නම්, $p(3q - 2p^2) = r$ බව පෙන්වන්න.

(118) $3x^3 + cx^2 + x - 2$ හි $(x - 2)$ සාධකයක් වන පරිදි c හි අගය සොයා c හි එම අගය සඳහා $3x^3 + cx^2 + x - 2 = 0$ එක් තාත්ත්වික මූලයක් පමණක් ඇති බව අපෝහනය කරන්න. c හි එම අගය සඳහා, $3x^3 + cx^2 + x - 2 + \lambda (x - 2)(3x - 1) = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික මූල තුනක් තිබීම පිණිස λ හි අගය පරාසය සොයන්න.

(119) (i) λ යනු ඕනෑම තාත්වික නියතයක් නම්, $(x - 2)(x + 1) = \lambda (x - 1)$ වර්ගජ සමීකරණයට තාත්වික හා ප්‍රභින්න මූල දෙකක් ඇති බව පෙන්වන්න.

(ii) $x^2 + 2x + 2 = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල දෙක α, β වේ. මෙම සමීකරණය නොවිසඳා

I. $1 + \frac{1}{\alpha}$ ද, $1 + \frac{1}{\beta}$ මූල වශයෙන් ඇති සමීකරණයත්,

II. $\alpha^3 + \beta^3$ හි අගයත් සොයන්න.

(120) (i) $x^2 + ax + bc = 0$ හි මූල α හා β ද,
$x^2 + bx + ac = 0$ හි මූල β හා δ වේ. a, b, c ප්‍රභින්න ද නිශ්ශූන්‍ය ද වේ.

I. a, b, c ඇසුරින් α , β , δ සොයා $a + b + c = 0$ බව පෙන්වන්න.

II. α හා δ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $x^2 + cx + ab = 0$ බව පෙන්වන්න.

(ii) x යනු 1 ට අසමාන වූ ඕනෑම ධන සංඛ්‍යාවක් නම්, $\frac{x^3 - 1}{3} > \frac{x^2 - 1}{2} > x - 1$ බව ඔප්පු කරන්න.

(121) (i) $x^3 + x - 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල λ, μ නම් $\lambda^2 = \mu + 2$ හා $\mu^2 = \lambda + 2$ බව පෙන්වන්න.
$\left[\frac{\lambda + 1}{\mu + 1}\right]$ හා $\left[\frac{\mu + 1}{\lambda + 1}\right]$ මූල වන සමීකරණය සොයන්න.

Scanned with CamScanner

(ii) $f(x) = x^2 - 2x - 3,\ x \in R$ යැයි ගනිමු. $y = f(x)$ ශ්‍රිතය ධන සහ සෘණ ලබන පරාස සොයා දළ ප්‍රස්තාරයක් අඳින්න. එම සටහනෙහිම $y = \dfrac{1}{f(x)}$ හි ප්‍රස්තාරයක් අඳින්න.

(122) $f(x)$ යන බහුපද ශ්‍රිතය $(x-1)(x-2)(x-3)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය, $A(x-2)(x-3) + B(x-3)(x-1) + C(x-1)(x-2)$ වේ. $f(1)$, $f(2)$ සහ $f(3)$ මගින් A, B හා C සොයන්න. තව ද, $x^5 + kx^2$ යන්න $(x-1)(x-2)(x-3)$ න් බෙදූවිට ශේෂයෙහි x^2 පද නොමැති නම් k හි අගය සොයන්න.

(123) (i) $ax^2 + bx + c = 0$ මූල α හා β නම් $(\alpha - \beta^2)(\beta - \alpha^2)$ හි අගය සොයන්න. වර්ග සමීකරණයේ එක් මූලයක් අනෙක් මූලයේ වර්ගය වීම සඳහා අවශ්‍යතාව අපෝහනය කරන්න.

(ii) $2x^2 - (a+1)x + a - 1 = 0$ වර්ග සමීකරණයේ මූලවල අන්තරය එහි මූලවල ගුණිතයට සමාන වීම සඳහා a ට තිබිය යුතු අගය සොයන්න.

(124) $ax^2 + bx + c = 0$ මූල α හා β නම්,

(i) $\dfrac{\alpha^2}{\beta} - \dfrac{\beta^2}{\alpha}$ (ii) $(a\alpha + b)^{-3} + (a\beta + b)^{-3}$ අගයන්න.

(125) a, b, c තාත්වික නියත වූ $ax^2 + bx + c = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල α_1, α_2 නම් $\alpha_1 + \alpha_2$ සහ $\alpha_1\alpha_2$ සඳහා a, b, c ආශ්‍රිතයෙන් ප්‍රකාශණ ලියා දක්වන්න.
λ තාත්වික නියතයක් වූ $x^2 + 2\lambda x + 2\lambda + 15 = 0$ සමීකරණයේ මූල α, β යැයි ගනිමු.

(i) α හා β තාත්වික වනු පිණිස λ හි අගය කුලකය සොයන්න.

(ii) මූල $2\alpha + \alpha\beta$ හා $2\beta - \alpha\beta$ වන $y^2 + qy + r = 0$ ආකාරයේ සමීකරණයක් p සහ q නියත λ ඇසුරින් ප්‍රකාශ කරමින් ලබාගන්න.

(iii) ඉහත සඳහන් y හි වර්ග සමීකරණයේ මූල අතර වෙනස 12 ක් වනු පිණිස λ හි අගයන් සොයන්න.

(126) (i) $x^2 - px + q = 0$ හි මූල α හා β නම්, සහ $V_n = \alpha^n + \beta^n$ නම්, $V_{n+1} = pV_n - qV_{n-1}$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් හෝ අන්‍යක්‍රමයකින් හෝ $\alpha^5 + \beta^5$ අගයන්න.

(ii) $x^2 + 2ax + b$ යන ප්‍රකාශණයේ $b - a^2$ අගය අගයට වඩා නොඅඩු බව පෙන්වන්න.
$y = x^2 + 2ax + b$ සහ $y = c - 2ax - x^2$ යන වක්‍ර

I. ස්පර්ශ වීමට, II. ඡේදනය නොවීමට,
III. ඡේදනය වීමට සපුරාලිය යුතු අවශ්‍යතා කවරේද?

Scanned with CamScanner

(127) (i) a හා b තාත්වික සංඛ්‍යා වේ නම්, $a \neq b$ සහ $a + b \neq 0$ සේ සලකා, $(a-b)x^2 - 2(a^2+b^2)x + a^3 - b^3 = 0$ සමීකරණයට a හා b ලකුණ සමාන වීම හෝ අසමාන වීම අනුව තාත්ත්වික හෝ අතාත්ත්වික මූල ඇති බව පෙන්වන්න.

(ii) $f(x) = x^2 + 2x - 8$ යැයි ගනිමු. ශ්‍රිතය ධන හා සෘණ ලබන පරාස සොයා, $y = f(x)$ හි දළ ප්‍රස්ථාරය අඳින්න. එනයින් $y = 2(x^2 + 2x - 8)$ හා $y = \frac{1}{2}(x^2 + 2x - 8)$ ප්‍රස්ථාර එම සටහනෙහිම අඳින්න.

(128) $x^2 - px + q = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β වේ. $\alpha^2 + \frac{1}{\beta^2}$ හා $\beta^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ මූල වන සමීකරණය සොයන්න. p හා q යන දෙකම තාත්වික නම්, මෙම සමීකරණයට සමාන මූල ඇතිවිය හැක්කේ $p = 0$ හෝ $p^2 = 4q$ නම් පමණක් බව ද ඔප්පු කරන්න.

(129) a හා b තාත්වික සංඛ්‍යා වූ $(x-a)^2 + (x-b)^2 = 2$ සමීකරණයේ මූල α හා β නම්,

(i) $|a - b| \leq 2$ ම නම් පමණක් α හා β තාත්වික බවත්,

(ii) $(a\alpha + b\beta)(b\alpha + a\beta) = (a^2+b^2)^2 + 4a^2b^2 - 2(a-b)^2$ බවත් පෙන්වන්න.

$a = 1$ හා $b = 2$ ලෙස ගෙන $a\alpha + b\beta$ හා $b\alpha + a\beta$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය, p හා q හි අගයන් සඳහන් කරමින් $(x-p)^2 + (x-q)^2 = 2$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

(130) $ax^2 + 2bx + c = 0$ හා $a'x^2 + 2b'x + c' = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත්නම්, $4(bc' - b'c)(ab' - a'b) = (ca' - c'a)^2$ බව පෙන්වන්න.

$kx^2 + 2x + 1 = 0$ හා $x^2 + 2x + k = 0$ සමීකරණයට පොදු මූලයක් ඇත්නම්, k හි අගයයන්ද එක් එක් අවස්ථාවේදී පොදු මූලය ද සොයන්න.

(131) $2x^2 + 2(m+n)x + m^2 + n^2 = 0$ සමීකරණයේ මූලවල වර්ගඵල වෛක්‍යය ද අන්තරය ද මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණ සොයන්න.

(132) $9x^2 + 6x + 1 = 4\lambda x$, $\lambda \in R$ λ නියතයකි. වර්ගජ සමීකරණයේ මූල α හා β වේ.

(i) මූල $\frac{1}{\alpha}$ හා $\frac{1}{\beta}$ වූ වර්ගජ සමීකරණය ලබාගන්න.

(ii) α හා β තාත්වික වන λ හි අගය කුලකය ලබාගන්න.

(iii) α හා β තාත්වික වන අතරම මූල දෙකම ධන වන λ හි අගය කුලකය සොයන්න.

(133) (i) α, β යනු $x^2 - x + p = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වේ.

γ, δ යනු $x^2 - 4x + q = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වේ.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ යනු පොදු අනුපාතය r වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක අනුපාද පද වේ නම්, $r \pm 2$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

p හා q තිබිය හැකි සියළුම අගයයන් සොයන්න.

$\alpha < \beta$ හා $\gamma < \delta$ නම්, p, q ඉහත අගයයන් ගන්නා විට $\alpha\gamma$ හා $\beta\delta$ මූල ලෙස ඇති සමීකරණ ලබාගන්න.

(ii) f හා g ශ්‍රිත දෙකක් $f(x) = x^2 + 2bx + 2c^2$ හා $g(x) = -x^2 - 2x + 6^2$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ හි අවම අගයද $g(x)$ හි උපරිම අගයද ලබාගන්න. $f(x)$ හි අවම අගය හි උපරිම අගය $> g(x)$ වනසේ c හි අගය පරාසය b ඇසුරින් ලබාගන්න.

134. (i) $y = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) + \frac{n}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි. $n > 2$, t යනු විචලයයකි.

$t > 0$ y හි අවම අගය $\sqrt{n^2 - 1}$ බව පෙන්වා, එම අගය ලබාදෙන t හි අගය සොයන්න.

$\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) + \frac{n}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) = k$ සමීකරණයේ $k > \sqrt{n^2 - 1}$ නම්, t සඳහා තාත්ත්වික මූල දෙකක් පවතින බව පෙන්වා, එම මූල දෙක සොයන්න.

එමගින් $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \frac{n}{2}(e^x - e^{-x}) = k$ සමීකරණයේ මූල අපෝහනය කරන්න.

(ii) $(\lambda - 3)x^2 - 2\lambda x + 5\lambda = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල තාත්ත්වික හා මූල දෙකම ධන වීම සඳහා λ ගත යුතු අගය පරාසය සොයන්න.

135. $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$ ප්‍රකාශනය ඒකජ සාධක 3 ක ගුණිතයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න. එනයින් $3x^{3x} - 4e^{2x} - 5x^x + 2 = 0$, $x \in R$ සමීකරණයේ විසඳුම් සොයන්න.

136. a, b, c යනු තාත්වික සංඛ්‍යා නම්, $2x - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ca) = 0$ සමීකරණයේ මූල තාත්වික බව පෙන්වන්න. මූල දෙකම සමාන නම් a, b, c අතර සම්බන්ධයක් ලියන්න.

137. $px^2 + qx + 1 = 0$ සමීකරණයට හරියටම එක් තාත්වික පැවතීමට p හා q අතර සම්බන්ධය සොයන්න.

138. $a^2x^2 + 2(a - 3)x + 2a - 12 = 0$ සමීකරණයේ $x = 2$ මූලයක් නම් a ට ගතහැකි අගයන් සොයන්න. a හි මෙම අගයන් සඳහා සමීකරණයේ ඉතිරි මූල සොයන්න.

139. $ax^2 + bx + c = 0$ හි මූල තාත්ත්වික නම්, $(a - b + c)x^2 - 2(a - c)x + (a + b + c) = 0$ හි මූල ද තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න. පළමු සමීකරණයේ මූල α හා β නම්, දෙවන සමීකරණයේ මූල වල ගුණිතය $\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{(1+\alpha)(1+\beta)}$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

140. $t + \frac{1}{t} = T + \frac{1}{T}$ නම්, $t = T$ හෝ $t = \frac{1}{T}$ බව සාධනය කරන්න. α, β යනු $px^2 + qx + r = 0$ සමීකරණයේ මූල වේ. $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda$ නම්, $\lambda + \frac{1}{\lambda} = \frac{q^2 - 2pr}{pr}$ බව පෙන්වන්න.

141. $1 < a < 2$ නම් ද $\lambda \in R$ නම් ද $k(x - 1)(x - 2) - (x - a) = 0$ සමීකරණයේ මූල තාත්වික බව පෙන්වන්න.

142. $f(x) = x^2 + (k + 2)x + 2k$ නම්,
k හි සියලුම අගයන් සඳහා $f(x) = 0$ හි මූල තාත්වික බව පෙන්වන්න.
$f(x - k) = 0$ හි මූල සොයන්න.
$f(x - k) - 2x = 0$ හි මූල $x = 0, 7$ නම්, k හි අගය සොයන්න.

143. a හා b තාත්වික සංඛ්‍යා වූ,
$(x - a)^2 + (x - b)^2 = 2$ සමීකරණයේ මූල α, β වේ.
(i) $(a\alpha + b\beta) + (a\beta + b\alpha) = (a + b)^2$ බව පෙන්වන්න.
(ii) $a = 1, b = 2$ ලෙස ගෙන $(a\alpha + b\beta)$ හා $(a\beta + b\alpha)$ මූලවන වර්ග සමීකරණයක p හා q හි අගයන් සඳහන් කරමින් $(x - p)^2 + (x - q)^2 = 2$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න.

144. $ax^2 + bx + c = 0$ හා $ax^2 + cx + b = 0$ ට පොදු මූලයක් පවතී නම්, $a + b + c = 0$ බව පෙන්වා ඉතිරි මූල දෙක මූල වන සමීකරණය සොයන්න. $[a \neq b]$

145. $x^2 - 11x + a = 0$ හා $x^2 - 14x + 2a = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත්නම් a හි අගය සොයන්න.

146. p, q හා r තාත්වික නම්, $p(q - r)x^2 + q(r - p)x = r(q - p)$ සමීකරණයේ මූල තාත්වික බව පෙන්වන්න.

147. $x^2 + ax + 1 = 0$ ට හා $x^2 + x + b = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් තිබේ නම්,
$(b - 1)^2 = (a - 1)(1 - ab)$ බව පෙන්වන්න.

148. x තාත්වික නම්, $(x^2 + ab)(2x - a + b)^{-1}$ යන්නට b ත් a ත් අතර පිහිටිය නොහැකි බව පෙන්වන්න.

149. $\cos\alpha$ හා $\sin\alpha$; යනු, $ax^2 + bx + c = 0$ හි මූල නම් $a^2 - b^2 + 2ac = 0$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

150. පහත සමීකරණ විසඳන්න.

(i) $x^2-5|x|+6=0$ (ii) $x^2+5|x|+6=0$

151. $ax^2+bx+c=0$ සමීකරණයේ මූලවල ඓක්‍යය, ඒවායේ පරස්පර ඓක්‍යයට සමාන වේ නම්, bc^2, ca^2, ab^2 සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටන බව පෙන්වන්න.

152. $\lambda^2(x^{2'}-x)+2\lambda x+3=0$ හි මූල α, β වේ. $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=3$ තෘප්ත කරන λ හි අගයන් 2 ක් හා λ_1, λ_2 නම්, $\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2}$, $\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1}$ මූල වන වර්ග සමීකරණ සොයන්න.

153. P යනු ඕනෑම නියතයක් නම්, $(x-2)(x+1)=p(x-1)$ ම තාත්වික හා ප්‍රභින්න මූල 2 ක් ඇති බව සාධනය කරන්න.

154. $x^2+px+q=0$ හා $x^2-ax+b=0$ සඳහා පොදු මූල ඇත්නම් හා $x^2-ax+b=0$ හි මූල සමාන නම්, $2(b+q)=ap$ බව පෙන්වන්න.

155. $9x^2+2xy+y^2-92x-20y+244=0$ නම් $\le x\le 6$ නම් $1\le y\le 2$ යැයි දක්වන්න.

156. $ax^2+bx+c=0$ හි තාත්වික හා ධන යැයි දෙන ලදුව, $a^2x^2+(2ac-b^2)x+c^2=0$ හි මූල තාත්වික හා ධන වේ යැයි දක්වන්න.

157. $ax^2+bx+c=0$ හි එක් මූලයක් අනෙක් වර්ගය නම්, $c(a-b)^3=a(c-b)^3$ බව පෙන්වන්න.

158. $x^3-ax^2+bx-c=0$ හි මූල ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක වේ නම්, $b^3=ca^3$ බව පෙන්වන්න.

159. ax^2+bx+c යන්න $a\{(x+\lambda)2+\mu\}$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. (මෙහි λ හා නිර්ණය μ කළ යුතුයි.)

160. ax^2+bx+c ට $x=\frac{1}{2}$ දී ස්වකීය වැඩිතම අගය 8 ඇත. ax^2+bx+c හි මූලයක් වේ.

a, b හා c සොයන්න.

161. $f(x)=k(x^2-2x-p)-(x-p)$ නම් $f(x)=0$ සමීකරණයේ k හි සියළුම අගයන් සඳහා අතාත්වික වේ නම්, p හි අගය පරාසය සොයන්න.

162. $(1-m)x^2-25(1+m)x-2(1-m)=0$ තාත්වික හා ප්‍රභින්න මූල පවතින බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

163. $(\cos p - 1)x^2 + \cos px + \sin p = 0$ ට තාත්ත්වික මූල ඇත්නම්, p හි අගය පරාසය සොයන්න.

164. $(a^2 + b^2)t^2 - 2(ac + bd)t + c^2 + d^2 = 0$ හි මූල සමාන නම්, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ බව පෙන්වන්න.

165. $(7 + 4\sqrt{3})^{x^2-8} + (7 - 4\sqrt{3})^{x^2-8} = 14$ විසඳන්න.

166. $ax^2 + bx + c = 0$ හි මූලවල පරස්පරය $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ මූල නම්,
$(aa_1 - cc_1)2 = (bc_1 - ab_1)(b_1c - a_1b)$ බව පෙන්වන්න.

167. $x^2 + bx + q = 0$ හි මූල 2 අතර අනුපාතය n වේ නම් $\frac{n^2+1}{n} = \frac{p^2 - 2q}{q}$ බව පෙන්වන්න.

168. $ax^2 + bx + c = 0$ හි මූල α හා β ද, $px^2 + qx + R = 0$ හි මූල γ හා δ ද, ඒවායේ විවේචක පිළිවෙලින් Δ_1 හා Δ_2 නම් ද, α, β, γ හා δ සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටයි නම් ද $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{a^2}{p^2}$ බව පෙන්වන්න.

පසුගිය විභාග ගැටලු

169. $a \neq 0$ හා $a + b + c \neq 0$ වන පරිදි $a, b, c \in \mathbb{R}$ වූ යැයි ද $f(x) = ax^2 + bx + c$ යැයි ද ගනිමු.
$f(x) = 0$ සමීකරණයෙහි 1 මූලයක් නොවන බව පෙන්වන්න.

$f(x) = 0$ හි මූල α හා β යැයි ගනිමු. $(\alpha - 1)(\beta - 1) = \frac{1}{a}(a + b + c)$ බව ද $\frac{1}{\alpha - 1}$ හා $\frac{1}{\beta - 1}$ මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය $g(x) = 0$ මගින් දෙනු ලබන බවද පෙන්වන්න. මෙහි $g(x) = (a + b + c)x^2 + (2a + b)x + a$ වේ. දැන්, $a > 0$ හා $a + b + c > 0$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ හි අවම අගය වන m_1 යන්න $m_1 = -\frac{\Delta}{4a}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි $\Delta = b^2 - 4ac$ වේ. $g(x)$ හි අවම අගය m_2 යැයි ගනිමු. $(a + b + c)m_2 = am_1$ බව අපෝහනය කරන්න. ඒ නයින්, සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $g(x) \geq 0$ ම නම් පමණක් සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) \geq 0$ බව පෙන්වන්න. *[2016 - A/L]*

170. (i) x හි මාත්‍රය 4 වූ F(x), G(x) හා H(x) යන බහුපද පහත දැක්වෙන පරිදි දෙනු ලැබේ.
$F(x) \equiv (x^2 - \alpha x + 1)(x^2 - \beta x + 1)$. මෙහි α හා β තාත්වික නියත වේ.
$G(x) \equiv 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$,
$H(x) \equiv x^4 + x^2 + 1$

Scanned with CamScanner

(a) $F(x)=0$ හා $G(x)$ යන දෙකටම එකම මූල තිබේ නම්, α හා β මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය $6x^2 - 35x + 50 = 0$ බව පෙන්වන්න. ඒනයින්, $G(x) = 0$ සමීකරණයෙහි සියලුම මූල සොයන්න.

(b) $F(x) = H(x)$ වෙයි නම්, α හා β ට තිබිය හැකි අගයන් සොයා, $H(x) = 0$ සමීකරණයේ මූල තාත්වික නොවන බව පෙන්වන්න.

(ii) (a) $f(x) \equiv 2x^4 + \gamma x^3 + \delta x + 1$ යැයි ගනිමු. මෙහි γ හා δ තාත්වික නියත වේ. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ හා $f(-2) = 21$ බව දී ඇති විට, $f(x)$ හි තාත්ත්වික ඒකජ සාධක දෙක සොයන්න.

(b) සියලුම තාත්ත්වික x සඳහා $(x^2 + x + 1)P(x) + (x^2 - 1)Q(x) = 3x$ සමීකරණය සපුරාලන $P(x)$ හා $Q(x)$ ඒකජ ප්‍රකාශන දෙක සොයන්න. *[2015 - A/L]*

171. $a, b, c \in \mathbb{R}$ හා $ac \neq 0$ යැයි ගනිමු. ශූන්‍යය, $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයෙහි මූලයක් නොවන බව පෙන්වන්න. මෙම සමීකරණයෙහි මූල α හා β යැයි ද $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ යැයි ද ගනිමු. $ac(\lambda + 1)^2 = b^2\lambda$ බව පෙන්වන්න. $p, q, r \in \mathbb{R}$ හා $pr \neq 0$ යැයි ගනිමු. තවද $px^2 + qx + r = 0$ සමීකරණයේ මූල γ හා δ යැයි ද $\mu = \frac{\gamma}{\delta}$ යැයි ද ගනිමු. $\lambda = \mu$ හෝ $\lambda = \frac{1}{\mu}$ වන්නේ $acq^2 = prb^2$ ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න. *[2014 - A/L]*

172. α හා β යනු $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල යැයි ද, γ හා δ යනු $x^2 + mx + n = 0$ සමීකරණයේ මූල යැයි ද ගනිමු. මෙහි $b, c, m, n \in \mathbb{R}$ වේ.

(i) b හා c ඇසුරෙන් $(\alpha - \beta)^2$ සොයා, ඒ නයින් m හා n ඇසුරෙන් $(\gamma - \delta)^2$ ලියා දක්වන්න. $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ නම්, $b^2 - 4c = m^2 - 4n$ බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta) = (c - n)^2 + (b - m)(bn - cm)$ බව පෙන්වන්න. $x^2 + bx + c = 0$ හා $x^2 + mx + n = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත්තේ $(c - n)^2 = (m - b)(bn - cm)$ ම නම් පමණක් බව අපෝහනය කරන්න. $x^2 + 10x + k = 0$ හා $x^2 + kx + 10 = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත. මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි. k හි අගයන් සොයන්න. *[2013 - A/L]*

173. $f(x) = x^2 + 2kx + 2$ යැයි ගනිමු. මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි.

(i) $f(x)$ යන්න $(x - a)^2 + b$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a හා b යනු k ඇසුරෙන් නිර්ණය කළ යුතු නියත වෙයි. කලනය භාවිතයෙන් තොරව $f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යය සොයා, මෙම ලක්ෂ්‍යය අවමයක් බව පෙන්වන්න. $f(x)$ හි අවම අගය k ඇසුරෙන් සොයන්න.

Scanned with CamScanner

එනයින් $y = f(x)$ වක්‍රය,

(a) $-1 < k < 2$ නම්, x අක්ෂයට ඉහළින් මුළුමනින්ම පිහිටන බව

(b) $k = -1$ හෝ $k = 2$ හෝ නම්, x අක්ෂය ස්පර්ශ කරන බව

(c) $k < -1$ හෝ $k > 2$ හෝ නම්, x අක්ෂය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යය දෙකකදී කපන බව පෙන්වන්න.

(ii) $k < -2$ ම නම් පමණක් m හි සියළු තාත්ත්වික හා පරිමිති අගයන් සඳහා $y = mx$ සරල රේඛාව $y = f(x)$ වක්‍රය තාත්ත්වික හා ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යය දෙකකදී ඡේදනය කරන බව සාධනය කරන්න. *[2012 - A/L]*

174. α හා β යනු $ax^2 + bx + c = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල යැයි ගනිමු. මෙහි a, b හා c යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. α හා β දෙකම,

(i) $b^2 - 4ac \geq 0$ ම නම් පමණක් තාත්ත්වික,

(ii) $b = 0$ හා $ac > 0$ ම නම් පමණක් හුදෙක් අතාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.
මූල α^2 හා β^2 වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න. එක්කෝ α හා β දෙකම තාත්ත්වික, නැත්නම් α හා β දෙකම හුදෙක් අතාත්ත්වික ම නම් පමණක් මෙම වර්ගජ සමීකරණයේ මූල දෙකම තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න. *[2011 - A/L නව නිර්දේශය]*

175. α හා β යනු $x^2 + qx + r = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල යැයි ගනිමු. $\alpha + \beta = -q$ හා $\alpha\beta = r$ බව පෙන්වන්න. $\alpha = 1 + \dfrac{1}{p}$ හා $\beta = 1 + \dfrac{1}{p+1}$ යැයි ගනිමු. මෙහි $p\ (\neq 0, -1)$ යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් වේ.

(i) $(q + r + 1)^2 = q^2 - 4r$ හා $r \neq -1$ බව පෙන්වන්න.

(ii) q හා r ඇසුරෙන් වූ සංගුණක සහිත $1 - \dfrac{1}{p}$ හා $1 - \dfrac{1}{p+1}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න. *[2011 - A/L පැරණි නිර්දේශය]*

176. α හා β යනු $f(x) = x^2 + px + q = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වේ. මෙහි p හා q තාත්ත්වික වන අතර, $2p^2 + q \neq 0$ වේ. $y(p - x) = p + x$ නම්, x සඳහා $f(x) = 0$ හි ආදේශ කිරීමෙන් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ $g(y) \equiv (2p^2 + q)y^2 + 2(q - p^2)y + q = 0$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $y \neq -1$ වේ. ඒ නයින් $g(y) = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β ඇසුරෙන් සොයන්න.

p හා q ඇසුරෙන් $\left(\dfrac{\alpha}{2\beta + \alpha}\right) + \left(\dfrac{\beta}{2\alpha + \beta}\right)$ ප්‍රකාශ කරන්න. *[2010 - A/L]*

Scanned with CamScanner

177. α හා β යනු $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල වේ. මෙහි $c \neq 0$ වේ. $\alpha^3\beta^2$ හා $\alpha^2\beta^3$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න. ඒ නයින් $\alpha^3\beta^2 + \frac{1}{\alpha^2\beta^3}$ හා $\alpha^2\beta^3 + \frac{1}{\alpha^3\beta^2}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න. *[2009 - A/L]*

178. α හා β යනු $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල වේ. α^4 හා β^4 මූල වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න. ඒ නයින් $\alpha^4 + \frac{1}{\beta^4}$ හා $\beta^4 + \frac{1}{\alpha^4}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

[2008 - A/L]

179. α හා β යනු $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල වේ. α^3 හා β^3 මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න. ඒ නයින් $\alpha^3 + \frac{1}{\beta^3}$ හා $\beta^3 + \frac{1}{\alpha^3}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න.

[2007 - A/L]

180. $px^2 + qx + r = 0$ හි මූල සමපාත වීමට අවශ්‍යතාවය ලියන්න.
$a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0$ හි මූල තාත්ත්වික හා සමපාත නම්,
$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$ බව පෙන්වන්න. *[2006 - A/L]*

181. $f(x) = x^2 + bx + c$ හා $g(x) = x^2 + qx + r$ යැයි ගනිමු. මෙහි $b, c, q, r \in \mathbb{R}$ වේ. $c \neq r$ වේ. α, β යනු $g(x) = 0$ හි මූල යැයි ගනිමු. $f(\alpha)\, f(\beta) = (c - r)2 - (b - q)(cq - br)$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $f(x) = 0$ ට $g(x) = 0$ ට පොදු මූලයක් ඇත්නම්, $b - q$, $c - r$ හා $cq - br$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක පිහිටන බව සාධනය කරන්න.
α හා γ යනු $f(x) = 0$ හි මූල නම්, β, γ මූල වන සමීකරණය,

$x^2 - \frac{(c + r)(q - b)x}{(c - r)} + \frac{cr(q - b)^2}{(c - r)^2} = 0$ බව පෙන්වන්න. *[2005 - A/L]*

182. (i) $\lambda \in \mathbb{R}$ හා $P(x) = x^2 - 2\lambda(x - 1) - 1$ යැයි ගනිමු. $P(x) = 0$ හි මූල තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න. $P(x) = 0$ හි මූලවල වෙක්‍යය වීම මූලවල වර්ගයන්ගේ වෙක්‍යයට සමාන වන සේ වූ λ හි සියළු අගයන් සොයන්න.

(ii) $P(x)$ වර්ගජ බහු පදයක් පිළිවෙලින් $(x - 1)$ $(x - 2)$ හා $(x - 3)$ යන්නෙන් බෙදූ විට ශේෂයන් 1, $\frac{1}{2}$ හා $\frac{1}{3}$ වේ. $(x - 1)$ $(x - 2)$ හා $(x - 3)$ යනු $Q(x) = xP(x) - 1$ මගින් දෙනු ලබන $Q(x)$ බහුපදයේ සාධක බව පෙන්වන්න. එනයින් $Q(x)$ සොයන්න.

[2004 - A/L]

Scanned with CamScanner

183. $\lambda \in \mathbb{R}$ හා $P(x)$ $(\lambda - 2)\ x^2 - 3(\lambda + 2)\ x + 6\lambda$ ලෙස ගනිමු.

(i) සියළු $x, \lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා $P(x)$ ධන වන සේ වූ λ හි අඩුතම නිඛිලමය අගය සොයන්න.

(ii) $P(x) = 0$ සමීකරණයට ප්‍රභින්න තාත්ත්වික මූල 2 ක් තිබෙන්නේ λ හි කවර අගයන් සඳහාද?

(iii) $P(x) = 0$ හි මූල තාත්ත්වික ද, එම මූල 2 හි වෙනස 3 ට සමාන ද නම්, λ සොයන්න.

[2003 - A/L]

184. $f(x) = x^2 + 2x + 9$ යැයි ගනිමු.

(i) α, β යනු $f(x) = 0$ හි මූල නම්, $\alpha^2 - 1$ සහ $\beta^2 - 1$ මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණ ලබාගන්න.

(ii) $f(x) = k$ සමීකරණයට x සඳහා හරියටම එක් තාත්ත්වික මූලයක් පවතින සේ වූ k තාත්ත්වික නියතයක අගය සොයන්න.

(iii) $\dfrac{1}{f(x)}$ හි වැඩිතම අගය සොයා, එය ලැබෙන්නා වූ x හි අගය ද දෙන්න.

(iv) $f(x) = \lambda x$ සමීකරණයට x සඳහා තාත්ත්වික විසඳුමක් නොමැති වන සේ වූ λ තාත්ත්වික නියතයේ අගය කුලකය නිර්ණය කරන්න.

[2002 - A/L]

185. (i) α හා β යනු $x^2 + px + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල සහ γ, δ යනු $x^2 + \dfrac{x}{p} + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල යැයි ගනිමු.

$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) = (\gamma^2 + p\gamma + 1)(\delta^2 + p\delta + 1)$ බව පෙන්වා,

$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) = \left(p - \dfrac{1}{p}\right)^2$ බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) a හා b යනු ධන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා නම්, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_a}$ බව පෙන්වන්න.

$$\frac{1}{\log_2 2001} + \frac{1}{\log_3 2001} + \frac{1}{\log_4 2001} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{\log_{100} 2001} = \frac{1}{\log_{100} 2001}$$ බව පෙන්වන්න.

[2001 - A/L]

186. (i) α හා β යනු $x^2 - px + q = 0$ සමීකරණයේ මූල වේ. $\alpha(\alpha + \beta)$ සහ $\beta(\alpha + \beta)$ මූල වන සමීකරණය සොයන්න.

(ii) $f(x, y) = 2x^2 + \lambda xy + 3y^2 - 5y - 2$ ප්‍රකාශනය රේඛීය සාධක දෙකක ගුණිතයක් ලෙස ලිවිය හැකි වීම සඳහා λ හි අගයන් සොයන්න.

Scanned with CamScanner

(iii) $\dfrac{2x^3 - x + 3}{x(x-1)^2}$ භින්න භාග වෙන් කරන්න. [2000 - A/L]

187. (i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12}$ නම්, x හි කිසිම තාත්ත්වික අගයක් සඳහා $-7 - 4\sqrt{3}$ සහ $-7 + 4\sqrt{3}$ අතර $f(x)$ නොපිහිටන බව පෙන්වන්න.

(ii) $A + \dfrac{B}{(x-4)} + \dfrac{C}{(x-4)}$ ආකාරයෙන් $f(x)$ ප්‍රකාශ කරන්න. A, B, C නියත වේ. එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ f හි උපරිම හා අවම සොයන්න.

[1998 New - A/L]

188. සමීකරණ $x^2 + bx + c = 0$ හි මූල α, β නම් $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}, \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ යැයි පෙන්වන්න.

0 හා −1 න් ප්‍රභින්න වුවත් තාත්ත්වික සංඛ්‍යා P වලට $\alpha = 1 + \dfrac{1}{p}$ ලෙස ද, $\beta = 1 + \dfrac{1}{p+1}$ ලෙස ද තිබේ නම් $(1 + b + c)^2 = b^2 - 4c$ ද, $c = -1$ ද බව පෙන්වන්න. තවද b, c ඇසුරෙන් සංගුණක ප්‍රකාශ කර $1 - \dfrac{1}{p}$, $1 - \dfrac{1}{p+1}$ මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණයක් ලබාගන්න.

[1998 Old - A/L]

189. α, β යනු $x^2 + qx + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල ලෙස ද, γ හා δ යනු $x^2 + x + q = 0$ සමීකරණයේ මූල ලෙස ද සිතමු.
$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) = (\gamma^2 + p\gamma + 1)(\delta^2 + p\delta + 1)$ බව පෙන්වන්න. දෙන ලද වර්ගජ සමීකරණ දෙකට අඩුම වශයෙන් එක් පොදු තාත්ත්වික මූලයක්වත් ලැබීමට q හි සියළු අගයන් සොයන්න.

[1997 - A/L]

190. $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල α, β තාත්වික වීම සඳහා අවශ්‍යතාවයක් ලියන්න. $a \neq 0$ හා a, b, c යනු නියත වේ. $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ ද, $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ ද බව පෙන්වන්න.

තවද $(4\alpha - 3\beta)(4\beta - 3\alpha) = \dfrac{49ac - 12b^2}{a^2}$ බව ද පෙන්වා $12b^2 < 49ac < \dfrac{49b^2}{4}$ යනු $\dfrac{3\alpha}{4}$ සහ $\dfrac{4\alpha}{3}$ අතර පිහිටන බව අපෝහනය කරන්න.

[1996 - A/L]

Scanned with CamScanner

191. (i) x හා y තාත්ත්විකව තිබියදී $2x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 8y + 15 = 0$ නම්, x යනු $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ සහ $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ අතර පැවතිය නොහැකි බවද, y යනු 1 හා 3 අතර පැවතිය නොහැකි බවද පෙන්වන්න.

(ii) $(a+b)$ යනු $x^3 - 3abx - (a^3 + b^3) = 0$ සමීකරණයට මූලයක් බව සත්‍යාපනය කරන්න. a හා b $(a \neq b)$ තාත්ත්වික නම්, ඉහත සමීකරණයට තාත්ත්වික මූලයක් පමණක් ඇති බව සාධනය කරන්න. *[1995 - A/L]*

192. $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල α, β වේ. මෙහි b, c තාත්ත්වික වේ. α^3 හා β^3 මූල වශයෙන් ඇති සමීකරණය ලබාගන්න. $b^3 - 6b + 9 = 0$ හා $c = 2$ නම්, α, β තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න. එනයින් $3 - 6y + 9 = 0$ හි තාත්ත්වික මූල සොයන්න. *[1994 - A/L]*

193. p, q යනු $x^2 + 2kx + k + 2 = 0$ සමීකරණයේ මූල වේ. මෙහි k යනු නියතයකි.

(i) $(p-q)^2 = 4\,[k^2 - k - 2]$ බව පෙන්වන්න. එනයින් මූල අතර අන්තරය 4 වූ ඉහත ආකාරයේ සමීකරණ ලියන්න.

(ii) $k \neq -2$ යැයි දී ඇති විට $\frac{p^2}{q}$ හා $\frac{q^2}{p}$ මූල වශයෙන් ඇති සමීකරණය ලබාගන්න. තවද මූල $1 + \frac{q^2}{p}$ හා $1 + \frac{p^2}{q}$ සමීකරණය ද ලියන්න. *[1990 - A/L]*

194. වර්ගජ සමීකරණ මූල වල ඓක්‍යය සහ ගුණිතය සඳහා ප්‍රකාශන එහි සංගුණක ඇසුරින් ලබාගන්න. $(a+x)(b+x) - c(a+x) - d(b+x) = 0$ හි මූල α, β නම්, $(\alpha - \beta)^2 = (a - b + c - d)^2 + 4cd$ බව පෙන්වන්න. *[1988 - A/L]*

195. α, β යනු $x^2 + px + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල නම්, මූල $\alpha + \beta + \lambda$ මූල වන වර්ග සමීකරණය සොයන්න. γ හා δ යනු $x^2 + qx + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල නම්, $(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) = q^2 - p^2$ බව සාධනය කරන්න. *[1987 - A/L]*

196. α, β යනු $x^2 + ax + b = 0$ නම් වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වේ. මෙහි a හා b නියත වේ. $S_0 = 2$ ලෙස ද, $S_n = \alpha^n + \beta^n$, n = 1, 2, 3 .... ලෙස ද වේ නම් $S_n + aS_{n-1} + bS_{n-2} = 0, 2, 3, \ldots\ldots$ වේ යැයි දක්වන්න. *[1982 - A/L]*

Scanned with CamScanner

197. a, b, c යනු තාත්ත්වික නියත ද, $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ ද, $g(x) = 2[ax + b]$ ද නම්, λ යනු තාත්ත්වික නියතයක් වන $F(x) = f(x) + \lambda g(x)$ වර්ගජ ප්‍රකාශනයේ විවේචකය ලියන්න.
$f(x) = 0$ හි මූල තාත්ත්වික ද, ප්‍රභින්න ද, නම් $F(x) = 0$ හි මූල තාත්ත්වික ද, ප්‍රභින්න ද බව අපෝහනය කරන්න. *[1981 - A/L]*

198. α හා β යනු $x^2 + px + q = 0$ හි මූල වේ. මෙහි p හා q නියත වේ. p හා q ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ හා $\alpha\beta$ සොයන්න.

එනයින් α, β හා $(\alpha + \beta)$ යනු $36x^3 - 12x^2 - 11x + 2 = 0$ සමීකරණයේ මූල නම් p හා q සොයන්න. එනයින් ඝනජ සමීකරණය විසඳන්න. *[Model]*

199. $x^2 + 2ax + b = 0$ හා $x^2 + 2px + q = 0$ වර්ගජ සමීකරණ 2 ට පොදු මූලයක් තිබේ නම්, පොදු මූලයේ අගය සොයන්න. $(q - p)^2 = 4(p - a)(aq - bp)$ බව පෙන්වන්න.

[Model]

200. (i) α හා β යනු $2x^2 + 2(m + n)x + m^2 + n^2 = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වේ. මෙහි m හා n යනු නියතයක් වේ. $(\alpha + \beta)^2$ හා $(\alpha - \beta)^2$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $ax^2 + bx + c = 0$ ආකාරයෙන් සොයන්න.

(ii) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 35x^2 - 36x + 320$ යන්න $[g(x)]^2 + \lambda\, g(x) + 320$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $g(x)$ තාත්ත්වික නම්, ඉහත සමීකරණයට තාත්ත්වික මූලයක් පමණක් ඇති බව සාධනය කරන්න. *[Model]*

Scanned with CamScanner

නිතර යෙදෙන වචන මාලාව

(1) වර්ගජ සමීකරණ - Quadratic Equations

(2) වර්ගජ ශ්‍රිත - Quadratic Functions

(3) මූල - roots

(4) වර්ගපූර්ණය - Completing the squares

(5) සාධක වෙන් කිරීම - factorising

(6) සූත්‍රය - formula

(7) තාත්වික - real
තාත්වික සහ ප්‍රභින්න - real & distinct
තාත්වික සහ සමාන - real & equal

(8) පරිමේය - rational

(9) අපරිමේය - irrational

(10) ධන - positive

(11) සෘණ - negative

(12) නියත - constant

(13) සංගුණක - coefficient

(14) මූල එකතුව - sum of the roots

(15) මූල ගුණිතය - product of the roots

(16) ප්‍රතිවිරුද්ධ ලකුණු - opposite signs

(17) එකම ලකුණු - same signs

(18) අපෝහනය - Deduction

(19) සමාන්තර ශ්‍රේණි - arithmetic progression

(20) ගුණෝත්තර ශ්‍රේණි - geometric progression

(21) මූල අතර අනුපාතය - ratio between the roots

(22) පොදු මූල - common root

Scanned with CamScanner